mittels Reduktion der Ordnung unschwer lösen :

$$v := u' \quad \Longrightarrow \quad v' + \left(2 \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + a\right) \cdot v = 0$$

$\Longrightarrow$ homogene Gleichung 1^{ter} Ordnung für v

$$\overset{22.4}{\Longrightarrow} \quad v(x) = \exp\left(\int_{x_\circ}^{x} 2\frac{\varphi'}{\varphi} + a\,dt\right)$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = \int_{x_\circ}^{x} v(t)\,dt.$$

$\square$

Beispiele und Bemerkungen zu Linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung mit variablen Koeffizienten

betrachte $y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0$ auf $I \subset \mathbb{R}$.

bisherige Annahme : a, b nur stetig.

Macht man sehr **viel stärkere Annahmen**, so gelingt es manchmal, eine nicht-triviale Lösung φ von $(*)$ zu konstruieren. Dann kann man unter Umständen Satz 22.9 benutzen und erhält ein Fundamentalsystem, also mit 22.8 eine Übersicht über die Lösungsgesamtheit auch im inhomogenen Fall. Das Stichwort ist

Potenzreihenansatz : ($\longrightarrow$ Übung!)

Voraussetzung :

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_\circ)^k, \; b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x - x_\circ)^k,$$

d.h. : die Koeffizienten $a(x), b(x)$ in $(*)$ lassen sich um $x_\circ \in I$ als konvergente Potenzreihen schreiben.

<u>Dann setzt man</u>

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_\circ)^k,$$

d.h. *man geht davon aus, dass es eine analytische Lösung gibt.*

<u>Einsetzen + Identitätssatz</u>

$\Longrightarrow$ Rekursionsformeln für γ_k in Termen von α_k, β_k

<u>danach</u> :

Probe, ob $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_\circ)^k$ auf Umgebung von $x_\circ$ konvergent ist !

<u>falls ja</u> :

Rechnungen wie

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_\circ)^k\right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\gamma_k (x - x_\circ)^{k-2}$$

sind erlaubt.

$\Longrightarrow$ $y(x)$ löst die Differentialgleichung.

Übung :

(1) **Legendre-DGL. :**

$$\boxed{(1+x^2)\,y''(x) - 2x\cdot y'(x) + n(n+1)\,y(x) = 0 \quad \text{auf } (-1,1),\ n\in\mathbb{N}_\circ}$$

(kommt in der theor. Physik vor)

Potenzreihenansatz liefert :

$$\Longrightarrow \quad \boxed{P_n(x) = \tfrac{1}{2^n!}\tfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n} \quad \underline{\text{Legendre-Polynom}}$$

(der Ordnung n).

(2) **Hermite-DGL. :**

$$\boxed{y''(x) - 2xy'(x) + 2n\,y(x) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_\circ}$$

Potenzreihenansatz ergibt :

$$\Longrightarrow \quad \boxed{H_n(x) = (-1)^n\,e^{x^2}\tfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}} \quad \underline{\text{Hermite-Polynom}}$$

(der Ordnung n).

P_n bzw. H_n sind Lösungen zu (1) bzw. (2) für das jeweilige n.

<u>*Wir konstruieren für die Legendre-Dgl. mit $n=1$ ein Fundamentalsystem :*</u>

$$(1-x^2)\,y''(x) - 2x\,y'(x) + 2\cdot y(x) \;=\; 0 \quad \text{auf } (-1,1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y''(x) - \tfrac{2x}{1-x^2}\,y'(x) + \tfrac{2}{1-x^2}y(x) \;=\; 0 \quad \text{auf } (-1,1)$$

bekannte Lösunge : $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = P_1(x)$

Ansatz : $\Psi(x) = u(x) \cdot x$ auf $(0,1)$ (dort ist $\varphi \neq 0$!)

$\Longrightarrow$ Dgl. für u gemäß 22.9 :

$$u''(x) + \left(2\frac{1}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right) u'(x) = 0$$

oder mit $v := u'$:

$$v'(x) + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right) v(x) = 0$$

Lösungsformel : $v(x) = \exp\left(\text{Stammfunktion zu } \frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)$
(vgl. Satz 22.4) .

$$\Longrightarrow v(x) = \exp\Big(-2 \cdot \ln x - \ln(1-x^2)\Big) = \frac{1}{x^2 \cdot (1-x^2)}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\Longrightarrow u(x) = \int v(x)\, dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Es folgt : $\Psi(x) = x \cdot u(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1.$

Bei der Anwendung von 22.9 mußten wir uns auf ein Intervall $J \subset (-1,1)$ ohne Nullstelle von $\varphi(x) = x$ beschränken, also etwa auf $(0,1)$.

Eine Probe zeigt aber :

$\Psi(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$ ist auf $(-1, 1)$ definierte Lösung der Dgl. und spannt mit φ den Lösungsraum auf.

5) Lineare Systeme 1^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten und (lineare Gleichungen n^{ter} Odnung mit konstanten Koeffizienten)

Sind im Prizip die einzigen Fälle, für die es systematische Methoden zur Bestimmung von Fundamentalsystemen gibt.

Betrachte das System

(1) $\quad y' = Ay, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mit **konstanter** $n \times n$ - Matrix $A = (a_{ij})$;

Lösungen existieren auf ganz $\mathbb{R}$ (nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

<u>Fall $n = 1$</u> :

$y' = a \cdot y$ mit $a \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = e^{ax}$ ist Lösung (dim des Lösungsraumes $\equiv 1$)

Deshalb machen wir den Exponentialansatz :

(2) $\quad \boxed{y(x) = e^{\lambda x} v, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$.

dann ist :

$$y'(x) = \lambda \cdot y(x),$$

also gilt :

$$
\begin{aligned}
& y'(x) = A\,y(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & \lambda\, e^{\lambda x}\, v = e^{\lambda x} A\, v \\
\Longleftrightarrow\quad & \boxed{Av = \lambda v} \qquad v \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda
\end{aligned}
$$

D.h. : Wir müssen zur Lösung von (1) mit dem Ansatz (2) **Eigenwerte** von A und **Eigenvektoren** bestimmen.

Da die Eigenwerte reeller Matrizen auch komplex sein können, betrachten wir zunächst die

$$
\text{komplexe Situation} : \begin{cases} A \in \mathbb{C}^{n\times n} & \text{komplexe } n \times n \text{ Matrix} \\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, & y' = A\,y \text{ auf } \mathbb{R} \end{cases}
$$

Dann gilt wie oben mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n$:

$$
\boxed{y(x) = e^{\lambda x} v \text{ Lsg.} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ E.W. von } A,\ v \text{ E.V. zu } \lambda}
$$

Die Eigenwerte von A ergeben sich als Nullstellen des

charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, \mathrm{Id})$.

$P_A(\lambda)$ ist ein Polynom vom Grad n über $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ $\exists$ n Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von $P_A(\lambda)$ nicht notwendig alle verschieden, d.h. es können Vielfachheiten > 1 auftreten.

Fassen wir die Ergebnisse in folgenden Satz zusammen :

Satz 22.10 :

Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}\, v$ ist Lösung genau dann,

wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor ist. Die Lösungen $e^{\lambda_k x}\, v_k$ sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$ genau dann, wenn die Vektoren v_k linear unabhängig sind.
Speziell :

$$\lambda_k \neq \lambda_\ell \quad \Longrightarrow \quad y_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k,\ y_\ell(x) = e^{\lambda_\ell x} v_\ell \text{ sind linear unabhängig.}$$

Beweis der letzten Aussage :

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$, $M \leq n$, komplexe Eigenwerte (nicht notwendig alle verschieden), $w_1, \ldots, w_M$ zugehörige E.V. $\in \mathbb{C}^n$. Setze

$$y_\ell(x) = e^{\alpha_\ell \cdot x} w_\ell \quad \text{und} \quad y(x) = \sum_{\ell-1}^{M} \beta_\ell\, y_\ell(x) \text{ mit Koeffizienten } \beta_\ell \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt :

$$y' = A\, y \quad \text{und} \quad y(0) = \sum_{\ell=1}^{M} \beta_\ell\, w_\ell.$$

Außdem :

$\{w_1, \ldots, w_M\}$ linear abhängig

$\Longleftrightarrow$ $y(0) = 0$ für passende Wahl von $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ nicht alle 0

$\Longleftrightarrow$ $y \equiv 0$ nach dem Eindeutigkeitssatz 22.1, der auch in der $\mathbb{C}^n-$ wertigen Situation gilt (da $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$)

$\Longleftrightarrow$ $y_1, \ldots, y_M$ sind linear abhängig

Dass für Eigenwerte $\mu \neq \lambda$ die Lösung linear unabhängig sind, folgt aus der Unabhängigkeit der Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

□

Korollar ("Idealfall") :

Besitzt A **n linear unabhängige Eigenvektoren** $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig verschieden), so bilden die Funktionen $\mathbf{y_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k}$, $k = 1, \dots, n$, ein **Fundamentalsystem über** $\mathbb{C}$, d.h. jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ läßt sich aus $y_1, \dots, y_n$ erzeugen,. Das gilt insbesondere dann, wenn es n verschiedene Eigenwerte gibt.

Bemerkung :

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ kommt nur 1 als Eigenwert mit Vielfachheit n vor,
der Eigenraum von 1 ist trivialerweise n dimensional.

Wie kommt man zu reellen Lösungen, wenn A reell ist?

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A, $v \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor zu λ

$$\Longrightarrow \quad y(x) = e^{\lambda x} v \text{ ist Lösung.}$$

Schreibe

$$\lambda = \alpha + i\beta,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R};\ v = u + iw,\ u,\ w \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \; e^{\lambda x} v &= e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right)(u+iw)\\ &= \underbrace{e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x)u - \sin(\beta x)w\right)}_{:=z(x)} + i\,\underbrace{e^{\alpha x}\left(\sin(\beta x)u + \cos(\beta x)w\right)}_{=:z^*(x)}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow z'(x) = Az(x),\; z^{*\prime}(x) = Az^*(x)$$

Ein komplexer Eigenwert liefert also **zwei** reelle Lösungen.

beachte :

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Eigenwert,
v Eigenvektor zu $\lambda \quad \Longrightarrow \quad \overline{\lambda}$ Eigenwert, $\overline{v}$ Eigenvektor zu $\overline{\lambda}$

für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $\lambda \neq \overline{\lambda}$, also v und $\overline{v}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$, d.h. Re v, Im v sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ z, z^* sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$ (der E.W. $\overline{\lambda}$ ergibt $-z$, $-z^*$ als reelle Lösungen!)

Satz 22.11 : *(Reeller Fall)*

*Sei A **reelle** $n \times n$ Matrix, $\lambda = \mu + i\nu$ **komplexer** E.W., $v = a + ib \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger E.V. Dann sind*

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{lclcl} z(x) &=& Re\,(e^{\lambda x}v) &=& e^{\mu x}\Big(\cos\nu x\cdot a - \sin\nu x \cdot b\Big)\\ z^*(x) &=& Im\,(e^{\lambda x}v) &=& e^{\mu x}\Big(\sin\nu x\cdot a + \cos\nu x\cdot b\Big)\end{array}\right.$$

zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Lösungen von (1) mit Werten in $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Damit läßt sich die reelle Situation so beschreiben

Korollar : "es gibt genügend viele E.V."

Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $s_1, \ldots, s_q \in \mathbb{R}$. Seien $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{C}^n$ (n=2p+q) E.V.'en zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, und $d_1, \ldots, d_q$ E.V.'en zu $s_1, \ldots, s_q$. Sind dann die Vektoren $\mathrm{Re}\, v_1, \ldots$, $\mathrm{Re}\, v_p$, $\mathrm{Im}\, v_1, \ldots$, $\mathrm{Im}\, v_p$, $d_1, \ldots, d_q$ **linear unabhängig über** $\mathbb{R}$, so gewinnt man ein reelles Fundamentalsystem durch Benutzen von (3) (für v und λ) und (2) (für d und s).

Beispiel :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' &=& y_1 - 2y_2 \\ y_2' &=& 2y_1 - y_3 \\ y_3' &=& 4y_1 - 2y_2 - y_3 \end{array} \right. \quad , \quad \text{also}$$

$$y'(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} y(x)$$

$$P_A(\lambda) \;=\; \det\,(A - \lambda\,\mathrm{Id}) \;=\; (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

Eigenwerte : $\underbrace{-\frac{1}{2}+i\,\frac{1}{2}\sqrt{7}}_{=\lambda}$, $\underbrace{-\frac{1}{2}-i\,\frac{1}{2}\sqrt{7}}_{=\overline{\lambda}}$, $\underbrace{1}_{=s}$

Eigenvektoren : $\underbrace{\left(\frac{3}{2}+i\,\frac{1}{2}\sqrt{7},2,4\right)}_{=v}$, $\underbrace{\left(\frac{3}{2}-i\,\frac{1}{2}\sqrt{7},2,4\right)}_{=\overline{v}}$, $\underbrace{(1,0,2)}_{=d}$

Lösungen dazu :

$$y(x) \;=\; e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z(x) \;=\; \mathrm{Re}(e^{\lambda x}v) \;&=\; e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &\quad -e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^*(x) \;=\; \mathrm{Im}(e^{\lambda x}v) \;&=\; e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad +e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

weitere Beispiele $\longrightarrow$ <u>Übungen !</u>

Problem :

was macht man in Fällen, wo sich nicht genügend viele linear unabhängige E.V.'en ausrechnen lassen?

Beispiel :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad P_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$$

einziger E.W. -1 mit Vielfachheit 2, nur ein E.V., nämlich $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hier versagt offensichtlich das Korollar, und das ist immer der Fall, wenn

$$\dim(\text{Eigenraum zu } \lambda) < \text{Vielfachheit von } \lambda \text{ in } P_A.$$

1. Möglichkeit : "Jordan-Form"

Bringe A auf Jordan-Form und erhalte daraus Formeln für ein Fundamentalsystem

($\rightarrow$ Literatur).

2. Möglichkeit : "Exponentialfunktion für Matrizen"

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man setzt

$$\boxed{\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k},$$

wobei A^k das *k-fache Matrizenprodukt* bezeichnet. Wählen wir

$$\|A\| := \sup_{|v|\leq 1} |Av| \quad \text{(Operatornorm)},$$

so ist

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k,$$

woraus die Konvergenz der Reihe folgt.

Sodann rechnet man nach :

i) $e^A := \exp(A)$ ist immer regulär : $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

ii) $\exp\begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}$

iii) $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}, \quad s, t \in \mathbb{R}$

iv) $e^{A+s\,\mathrm{id}} = e^s e^A, \quad s \in \mathbb{R}$

v) $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

vi) S regulär $\implies Se^A S^{-1} = \exp(SAS^{-1})$

vii) $\left.\begin{array}{l} A \text{ nilpotent, d.h.} \\ A^m = 0 \text{ für ein } m \end{array}\right\} \implies e^A = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} A^k$

viii) $t \mapsto e^{tA}$ ist diffenzierbar mit

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA}}$$

Satz 22.12 :

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\eta_\circ \in \mathbb{R}^n$ *und* $t_\circ \in \mathbb{R}$.

Die **eindeutige Lösung** *des linearen Systems*

$$\begin{aligned} y(t_\circ) &= \eta_\circ \\ y'(t) &= Ay(t),\ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist

$$t \mapsto \underbrace{\exp\Big((t-t_\circ)A\Big)}_{Matrix}(\eta_\circ)$$

Beweis :

Eindeutigkeit klar! Nun zeige, dass diese Funktion das AWP löst.

Korollar :

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ein **Fundamentalsystem** zu $y' = A\,y$ wird gegeben durch

$$t \mapsto \exp(tA)e_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

wobei $\{e_i\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet (i.A. die kanonische Basis).

Beispiel :

A <u>nilpotent</u>, $A^m = 0$

$$\Longrightarrow \qquad t \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} t^k A^k(e_i),\ i = 1, \ldots, n$$

ist Fundamentalsystem.

Bemerkung :

Die explizite Berechnung von e^{tA} ist i.a. nicht möglich; um zu verwertbaren Ergebnissen zu gelangen, ist man gezwungen, auf die Jordan'sche Normalform von A zurückzugehen ($\longrightarrow$ Literatur!)

Lineare Gleichungen n$^{\text{ter}}$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(1) $y^1(n) + a_{n-a}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1\, y' + a_\circ\, y = 0$

mit $a_\circ, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ für $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\Updownarrow$

$$(1)^*\quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot Y \qquad \text{für } Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

beachte :

$P_A(\lambda = (-1)^n \Big\{ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_\circ \Big\}$ (Polynom über $\mathbb{C}$)

Das charakteristische Polynom der Matrix A ergibt sich als Koeffizientenpolynom der Gleichung (1). Durch Spezialisieren der allgemeinen Ergebnisse auf $(1)^*$ bekommt man

Satz 22.13 : *(Fundamentalsystem zu (1))*

i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von P_A mit Vielfachheit k. Dann sind die Funktionen
$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ linear unabhängige Lösungen von (1).

ii) Verfährt man gemäß(i) für die <u>verschiedenen</u> Nullstellen λ von P_A, so bekommt man ein <u>komplexes</u> Fundamentalsystem.

iii) <u>Reeller Fall</u> : Seien $a_\circ, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Ist $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ Nullstelle von P_A ($\Longrightarrow \overline{\lambda}$ ebenfalls Nullstelle), so spaltet man die Lösung aus (i) in Re und Im auf und erhält die <u>2^k reellen Funktionen</u>

$$\boxed{x^q e^{\mu x} \cos(\nu x),\ x^q e^{\mu x} \sin(\nu x),\ q = 0, \ldots, k-1}$$

(Die zu $\overline{\lambda}$ gehörigen komplexen Lösungen liefern dieselben reellen Lösungen und bleiben deshalb unberücksichtigt!).
Ist α <u>reelle Nullstelle</u> mit Vielfachheit ℓ, so bekommt man daraus die Lösungen

$$\boxed{x^p\ e^{\alpha x},\ p = 0, \ldots, \ell - 1}\ .$$

Verfährt man so für alle Nullstellen, so ergibt sich ein reelles Fundamentalsystem.

Bemerkung :

Man kann 22.13 ohne Rückgriff auf Jordan-Formen direkt beweisen.

Beispiel :

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y'' + 8y' + 16y \equiv 0$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 \\ &= (\lambda + 2)^3 (\lambda^2 - 2\lambda + 2) \\ &= (\lambda + 2)^3 (\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Fundamentalsystem : e^{-2x}, $x \cdot e^{-2x}$, $x^2 \cdot e^{-2x}$, $e^x \cdot \sin x$, $e^x \cdot \cos x$

$\longrightarrow$ Übung : ausführliche Diskussion der "gedämpften Schwingungen"

$$y'' + 2ay' + by = 0, \; a, \; b \in \mathbb{R}$$

$\square$